

# Equipo de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Paralelos

**José Manuel Fernandez Giangreco**

Ciencias y Tecnología - Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción

Centro Nacional de Computación - Universidad Nacional de Asunción

Asunción, Paraguay

`jmfernandez@cnc.una.py`

y

**Benjamín Barán Cegla**

Centro Nacional de Computación - Universidad Nacional de Asunción

Asunción, Paraguay

`bbaran@cnc.una.py`

## Resumen

Actualmente existe un gran número de Algoritmos Evolutivos para Optimización Multiobjetivo (MOEAs) con características diversas. Con el uso cada vez más extendido de estos algoritmos en problemas reales de optimización, se hace necesario mejorar el desempeño de los mismos sacando el mejor provecho de las bondades de cada alternativa. Para ello, una reconocida alternativa es la incorporación de conceptos de paralelismo al diseño de estos algoritmos, así conocidos como pMOEAs. En consecuencia, los algoritmos evolutivos multiobjetivo paralelos se constituyen en un área de gran importancia y creciente interés para aplicaciones prácticas, sobre todo en problemas industriales, financieros y de ingeniería.

Dado que los pMOEAs difieren en su desempeño ante el tipo del problema, ya que pueden explorar diferentes porciones del espacio solución se propone un Equipo de pMOEAs (o Team Algorithm). Para validar esta propuesta, se realizaron implementaciones de los mismos aplicados a un conjunto de seis problemas de prueba. Los resultados experimentales muestran las ventajas y desventajas existentes en el desarrollo y aplicación del Equipo de Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Paralelos.

Palabras Claves: **Algoritmos Evolutivos, Optimización Multiobjetivo, Equipo de Algoritmos.**

## Abstract

At the moment a great number of Evolutionary Algorithms exists for Multiobjective Optimization (MOEAs) with diverse characteristics. With the more and more extended use of these algorithms in real problems of optimization, it becomes necessary to improve the performance of the same ones taking out the best profit in the kindness of each alternative. For it, a grateful alternative is the incorporation of concepts of parallelism to the design of these algorithms, this way well-known as pMOEAs. In consequence, the multiobjective algorithms evolutionary parallel are constituted in an area of great importance and growing interest for practical applications, mainly in industrial, financial problems and of engineering.

Since the pMOEAs differs in their performance because of the type of the problem, since they can explore different portions of the space solution a pMOEAs Team is proposed (or Team Algorithm). To validate this proposition, they were carried out implementations of the same ones applied to a set of six test problems. The experimental results show the existent advantages and disadvantages in the development and application of the Team of Parallel Multiobjective Evolutionary Algorithms.

Keywords: **Evolutionary Algorithms, Multiobjective Optimization, Team Algorithm.**

## 1. Introducción

En la búsqueda de soluciones a problemas del mundo real puede ser necesario satisfacer de manera simultánea múltiples objetivos, los cuales pueden ser contradictorios [22]. De existir la posibilidad de combinar los diferentes objetivos y conociendo la mejor manera de hacerlo, entonces se puede considerar la existencia de un único objetivo a optimizar. En este caso, para obtener la solución óptima, basta con encontrar el mínimo o el máximo de una única función que resuma todos los objetivos. Sin embargo, lo usual es que no se conozca de que manera combinar los

diferentes objetivos, o esto sea inadecuado, cuando no imposible. Entonces, se trata de un Problema de Optimización Multiobjetivo (*Multiobjective Optimization Problem* - MOP) [22, 20, 8, 26].

En los problemas de optimización multiobjetivo con objetivos contradictorios no existe una solución única que pueda ser considerada la mejor, sino un conjunto de estas representando los mejores compromisos entre los objetivos, en el sentido que cada una es mejor que las otras en algún objetivo, pero ninguna es mejor que otra en todos los objetivos simultáneamente[22]. Dicho conjunto es llamado conjunto de soluciones Pareto óptimas y sus correspondientes vectores en el espacio objetivo constituyen el denominado Frente Pareto [20].

Los Algoritmos Evolutivos (*Evolutionary Algorithms* - EAs) [1] han demostrado ser especialmente adecuados para la optimización multiobjetivo [11, 27]. Desde la década de los 80s se han desarrollado varios EAs, capaces de buscar múltiples soluciones Pareto óptimas en forma simultánea en una sola corrida [10, 11, 16, 19]. Con el paso de los años, la Optimización Evolutiva Multiobjetivo (EMOO - *Evolutionary MultiObjective Optimization*) se ha establecido como un área importante de investigación, recibiendo cada vez mayor atención [26].

En la actualidad, existe un gran número de Algoritmos Evolutivos para Optimización Multiobjetivo (*Multiobjective Evolutionary Algorithms* - MOEAs) [9]. Con el uso cada vez más extendido de estos algoritmos en problemas reales de optimización, se hace necesario mejorar el desempeño de los mismos [2, 18]. Por lo tanto, para asegurar la aplicabilidad de la técnica de optimización evolutiva multiobjetivo a problemas de complejidad creciente, es necesario mejorar tanto en la efectividad como en la eficiencia de los métodos evolutivos. Para ello, una alternativa es la incorporación de conceptos de paralelismo al diseño de estos algoritmos [18, 25], así tenemos a los algoritmos evolutivos multiobjetivo paralelos (*parallel Multiobjective Evolutionary Algorithms* - pMOEAs)

Por otra parte tenemos a los TA (*Team Algorithm*), que han demostrado ser una excelente técnica computacional para combinar una variedad de algoritmos corriendo en diferentes procesadores de una red típicamente asíncrona, como las actuales redes de área local conformadas por computadores personales heterogéneos [2, 7, 5, 6, 3, 4].

Ya que se dispone de diversos algoritmos pMOEAs surgen el *Team Algorithm Multiobjective Evolutionary Algorithms* (TA-MOEA) como una alternativa válida para mejorar tanto la efectividad como en la eficiencia al poder explorar con características diferentes porciones, posiblemente disjuntas, del espacio de búsqueda.

Siendo el área de algoritmos evolutivos multiobjetivo un área de gran importancia y reciente interés, es necesario determinar las ventajas y desventajas existentes en el desarrollo y aplicación de un TA-MOEA.

A fin de determinar la efectividad de la técnica, como en [20, 30, 26], el presente trabajo realiza una comparación de distintos pMOEAs y el TA-MOEA utilizando diferentes métricas experimentales propuestas para medir su desempeño [17, 26]. Para ello, se han realizado implementaciones paralelas de siete algoritmos evolutivos para optimización multiobjetivo y combinando los mismos en un *Team Algorithm*, aplicados a los seis problemas ZDT, que presentan distintas dificultades [30].

- Este trabajo propone un TA-MOEA en el cual se establece un conjunto fijo de pMOEAs.

El presente resumen está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se da la definición general de un problema de optimización multiobjetivo. La formulación de los problemas ZDT con sus funciones objetivo son dadas en la Sección 3. Los algoritmos en equipo son explicados en la Sección 4. Los resultados experimentales son mostrados en la Sección 5. Por último, las conclusiones y los trabajos futuros son presentados en la Sección 6.

## 2. Optimización Multiobjetivo

Un Problema de Optimización Multiobjetivo (MOP) general incluye un conjunto de  $n$  parámetros (variables de decisión), un conjunto de  $k$  funciones objetivo, y un conjunto de  $m$  restricciones. Las funciones objetivo y las restricciones son funciones de las variables de decisión. Luego, el MOP puede expresarse como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Optimizar} & \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \\
 \text{sujeto a} & \mathbf{e}(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x}), \dots, e_m(\mathbf{x})) \geq \mathbf{0} \\
 \text{donde} & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X} \\
 & \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbf{Y}
 \end{array} \tag{2.1}$$

siendo  $\mathbf{x}$  el vector de decisión e  $\mathbf{y}$  el vector objetivo. El espacio de decisión se denota por  $\mathbf{X}$ , y al espacio objetivo por  $\mathbf{Y}$ . Optimizar, dependiendo del problema, puede significar igualmente, minimizar o maximizar. El conjunto de restricciones  $\mathbf{e}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  determina el conjunto de soluciones factibles  $\mathbf{X}_f$  y su correspondiente conjunto de vectores objetivo factibles  $\mathbf{Y}_f$ .

El problema de optimización consiste en hallar la  $\mathbf{x}$  que tenga el “mejor valor” de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . En general, no existe un único “mejor valor”, sino un conjunto de soluciones óptimas. Entonces, un nuevo concepto de optimalidad debe ser establecido para MOPs. Dados dos vectores de decisión  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ , puede darse una de las tres condiciones:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) & \text{ si y solo si } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: f_i(\mathbf{u}) = f_i(\mathbf{v}) \\
f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v}) & \text{ si y solo si } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: f_i(\mathbf{u}) \leq f_i(\mathbf{v}) \\
f(\mathbf{u}) < f(\mathbf{v}) & \text{ si y solo si } f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v}) \wedge f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

En un contexto de minimización, esta situación se expresa con los siguientes símbolos y términos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} > \mathbf{v} & \text{ (} \mathbf{u} \text{ domina a } \mathbf{v} \text{) si y solo si } f(\mathbf{u}) < f(\mathbf{v}) \\
\mathbf{v} > \mathbf{u} & \text{ (} \mathbf{v} \text{ domina a } \mathbf{u} \text{) si y solo si } f(\mathbf{v}) < f(\mathbf{u}) \\
\mathbf{u} \sim \mathbf{v} & \text{ (} \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ no son comparables) si y solo si } f(\mathbf{u}) \not\leq f(\mathbf{v}) \wedge f(\mathbf{v}) \not\leq f(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Alternativamente,  $\mathbf{u} \triangleright \mathbf{v}$  denota que  $\mathbf{u}$  domina o es igual a  $\mathbf{v}$ .

Dado un vector de decisión  $\mathbf{x} \in X_f$ , se dice que  $\mathbf{x}$  es no dominado respecto a un conjunto  $V \subseteq X_f$  si y solo si  $\mathbf{x} > \mathbf{v}$  o  $\mathbf{x} \sim \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ . En caso que  $\mathbf{x}$  sea no dominado respecto a todo el conjunto  $X_f$ , y solo en ese caso, se dice que  $\mathbf{x}$  es una solución Pareto óptima. Por lo tanto, el conjunto Pareto óptimo  $X_{true}$  puede ser definido formalmente de la siguiente manera:

$$X_{true} = \{ \mathbf{x} \in X_f \mid \mathbf{x} \text{ es no dominado con respecto a } X_f \} \tag{2.4}$$

El correspondiente conjunto de vectores objetivo  $Y_{true} = f(X_{true})$  constituye el Frente Pareto óptimo [12].

### 3. Problemas ZDT

Conjunto de seis problemas desarrollados en [30] que contemplan las distintas posibilidades existentes en [15]. Todos son del tipo minimización.

Las funciones objetivos del conjunto de prueba se restringen a dos objetivos por considerarse la manera más simple y completa de reflejar los aspectos esenciales de la optimización multiobjetivo, cada una de ellas está estructurada de igual manera sobre tres funciones  $f_1$ ,  $g$  y  $h$ :

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} & \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1), f_2(\mathbf{x})) \\
\text{sujeta a} & \quad f_2(\mathbf{x}) = g(x_2, \dots, x_n) \cdot \mathbf{h}(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_n)) \\
\text{donde} & \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X
\end{aligned} \tag{3.1}$$

La función  $f_1$  es una función que depende únicamente de la primera variable de decisión,  $g$  es una función de las  $n-1$  variables de decisión restantes y los parámetros de  $h$  son los valores de las funciones  $f_1$  y  $g$ . Las funciones de prueba difieren en estas tres funciones así como en el número de variables  $n$  y en los valores que éstas pueden tomar.

El problema ZDT1 tiene 30 variables en el rango [0,1]. Su frente de Pareto es convexo. Es el problema más sencillo del conjunto, tiene un frente de Pareto continuo y una distribución uniforme de soluciones a lo largo del frente.

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}_1) &= x_1 \\
g(x_2, \dots, x_n) &= 1 + 9 \cdot \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{(n-1)} \\
h(f_1, g) &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n=30$  y  $x_i \in [0,1]$ .

El problema ZDT2 tiene 30 variables en el rango [0,1]. Su frente de Pareto es no convexo. La distribución de soluciones a lo largo del frente de Pareto es uniforme.

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}_1) &= x_1 \\
g(x_2, \dots, x_n) &= 1 + 9 \cdot \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{(n-1)} \\
h(f_1, g) &= 1 - \left( \frac{f_1}{g} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ,  $n=30$  y  $x_i \in [0,1]$ .

El problema ZDT3 tiene 30 variables en el rango  $[0,1]$ . Su frente de Pareto es discontinuo. La distribución de soluciones a lo largo del frente es uniforme.

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_1) &= x_1 \\ g(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) &= 1 + 9 \cdot \sum_{i=2}^m \frac{x_i}{(m-1)} \\ h(f_1, \mathbf{g}) &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{\mathbf{g}}} - \left(\frac{f_1}{\mathbf{g}}\right) \sin(10\pi f_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ,  $n=30$  y  $x_i \in [0,1]$ .

El problema ZDT4 tiene 10 variables en el rango  $[0,1]$ . Su frente de Pareto es convexo. La complejidad de este problema es que contiene  $21^9$  frentes Pareto-óptimos locales [30] y, por tanto, prueba a los algoritmos evolutivos con relación a su capacidad de lidiar con la multimodalidad:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_1) &= x_1 \\ g(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) \\ h(f_1, \mathbf{g}) &= 1 - \sqrt{\frac{f_1}{\mathbf{g}}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ,  $n=10$ ,  $x_1 \in [0,1]$ ,  $x_2, \dots, x_n \in [-5,5]$ .

El problema ZDT5 utiliza funciones booleanas definidas sobre *strings*. Constituye un caso de problema *deceptivo* ya que la forma de la función auxiliar determina que la mayor parte del espacio de búsqueda se concentra cerca de óptimos locales, mientras que el óptimo global se halla relativamente aislado.

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_1) &= 1 + u(\mathbf{x}_1) \\ g(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \sum_{i=2}^n v(u(\mathbf{x}_i)) \\ h(f_1, \mathbf{g}) &= \frac{1}{f_1} \\ u(\mathbf{x}_i) &= \text{"Número de unos en } \mathbf{x}_i \text{"} \\ v(u(\mathbf{x}_i)) &= \begin{cases} 2 + u(\mathbf{x}_i) & \text{si } u(\mathbf{x}_i) < 5 \\ 1 & \text{si } u(\mathbf{x}_i) = 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ,  $n=11$ ,  $x_1 \in \{0,1\}^{30}$ ,  $x_2, \dots, x_n \in \{0,1\}^5$ .

El problema ZDT6 tiene 10 variables en el rango  $[0,1]$ . Su frente de Pareto es no convexo. La complejidad de este problema está dada por la combinación de la forma no convexa del frente de Pareto y la distribución no uniforme de soluciones a lo largo de él.

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}_1) &= 1 - e^{(-4x_1)} \sin^6(6\pi x_1) \\ g(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= 1 + 9 \cdot \left(\sum_{i=2}^n \frac{x_i}{(n-1)}\right)^{\frac{1}{4}} \\ h(f_1, \mathbf{g}) &= 1 - \left(\frac{f_1}{\mathbf{g}}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ,  $n=10$ ,  $x_i \in [0,1]$ .

#### 4. Algoritmos en Equipo

El desempeño de un algoritmo se mide generalmente por la calidad de los resultados obtenidos y por la rapidez en la respuesta. En este aspecto, los *Team Algorithms* han demostrado ser muy eficientes superando muchas veces en desempeño a los métodos tradicionales [3, 4, 5, 6]. Debido a estas ventajas en combinar diferentes métodos, se realizó en el presente trabajo la combinación de siete Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos:

- *Multiobjective Genetic Algorithm* (MOGA) [19].
- *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) [24].
- *Niched Pareto Genetic Algorithm* (NPGA) [21].
- *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA2) [13].
- *Controlled Elitist NSGA II* (CNSGA2) [14].
- *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) [29].
- *Strength Pareto Evolutionary Algorithm II* (SPEA2) [28].

Los siete MOEAs fueron implementados en forma paralela y aplicados a los seis problemas ZDT propuestos en la sección 3.

Una alternativa para disminuir el tiempo de computación consiste en paralelizar el problema, descomponiéndolo en numerosos subproblemas. Al respecto, los *Team Algorithm* han surgido como una novedosa herramienta que no solo mejora los tiempos de respuesta del algoritmo sino que se ha comprobado que tiene un efecto sinérgico [3, 4, 5, 6], esto es, el algoritmo no solo mejora la velocidad de procesamiento sino que también la calidad de los resultados, razón por la cual se describe el modelo de un *Team Algorithm* formado por un proceso Coordinador y siete procesos paralelos esclavos en los cuales se pueden ejecutar uno de los siete MOEAs disponibles. El modelo utilizado se denomina entonces *Team Algorithm* of pMOEAs y se ilustra en la Figura 1.

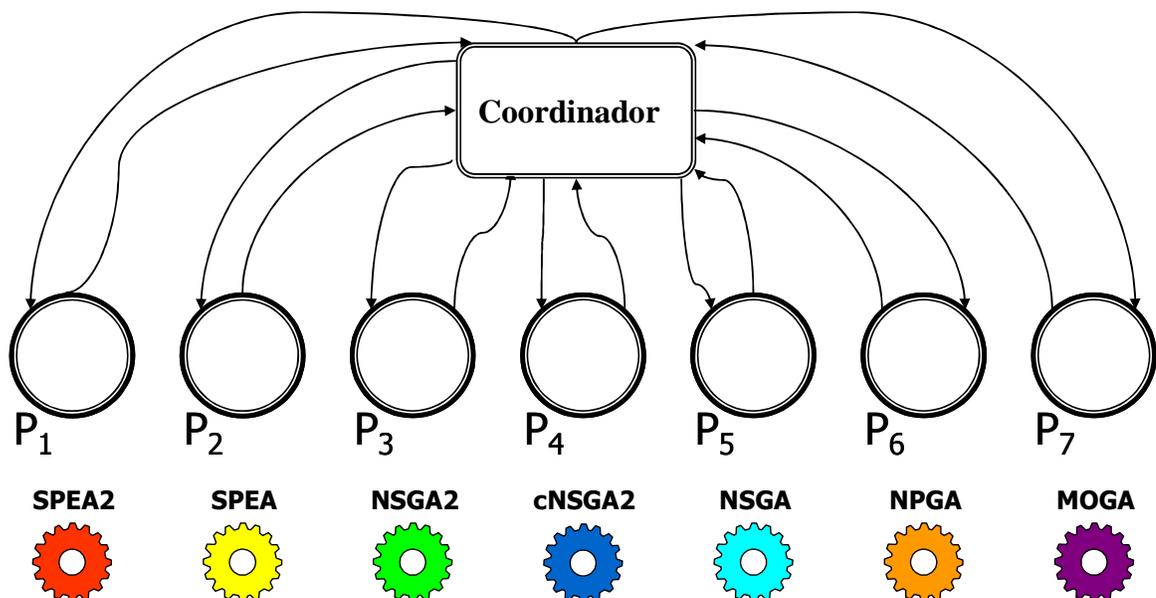


Figura 1. Modelo del *Team Algorithm* of pMOEAs

El modelo propuesto se basa en la utilización de dos tipos distintos de procesos, formando un equipo de trabajo:

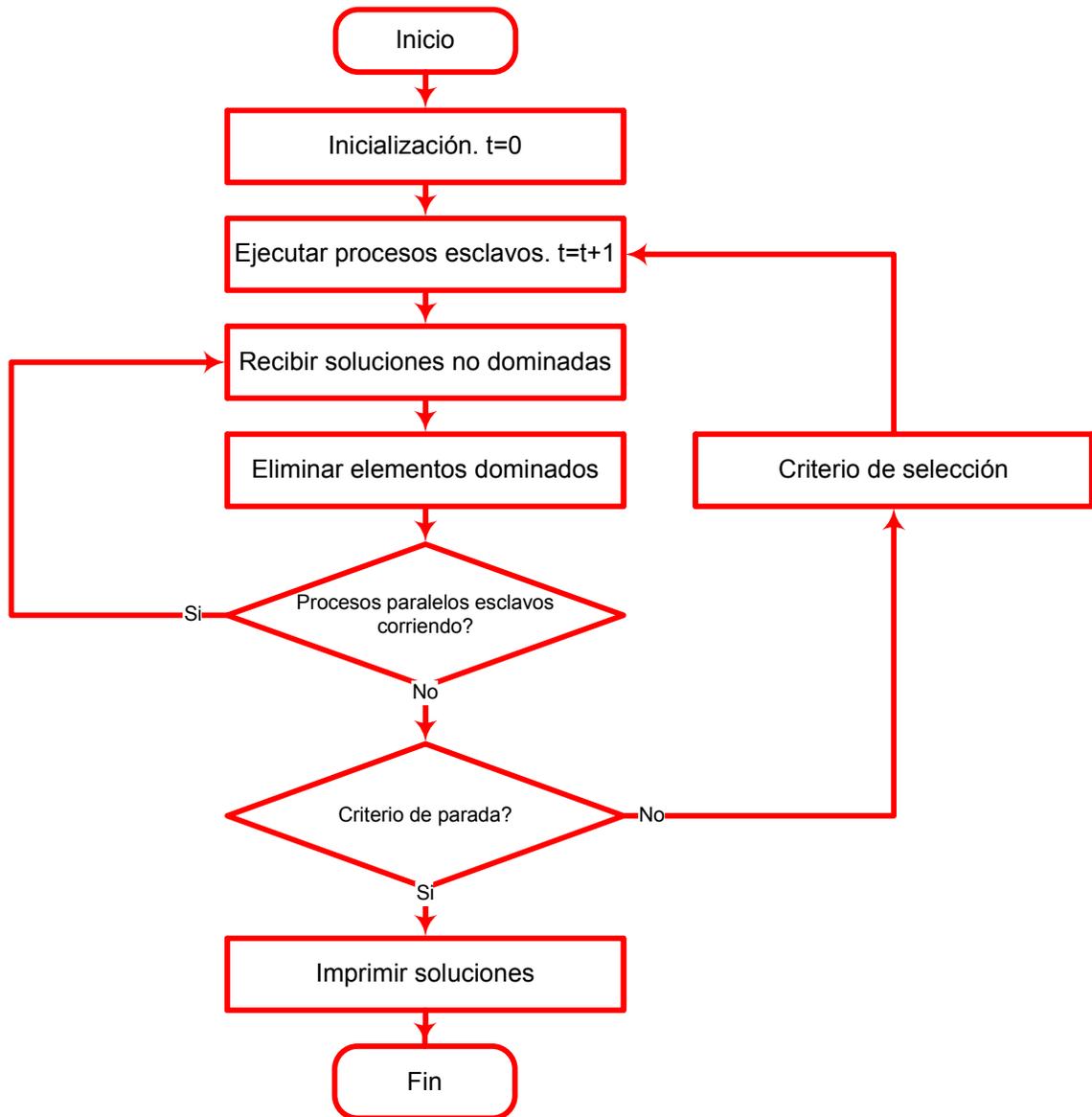
- un proceso Coordinador
- siete procesos pMOEAs.

El diagrama de flujo del proceso Coordinador se observa en la Figura 2. El Coordinador se encarga de seleccionar, iniciar y controlar las distintas instancias de los MOEAs utilizados y de almacenar las soluciones obtenidas por éstos.

A los distintos MOEAs que realizan la búsqueda de soluciones se les ha agregado un procedimiento de migración aleatorio y uno de recepción asíncrona de soluciones.

El proceso Coordinador primeramente lee el número de procesos MOEA que trabajaran en la búsqueda de soluciones. Puesto que cada uno de éstos puede corresponder a un tipo de MOEA distinto o bien al mismo tipo de algoritmo evolutivo pero con diferentes parámetros, el Coordinador también precisa información sobre el tipo de MOEA que se utilizará así como los parámetros que le corresponden, para inicializarlos posteriormente en forma conveniente. Así mismo, recibe la especificación del número de soluciones deseadas. Seguidamente crea las estructuras para almacenar los resultados provenientes de los distintos procesos MOEA en la población Coordinador. Luego, el

Coordinador se agrega a un grupo de trabajo e inicia cada uno de los procesos MOEA con sus parámetros específicos. Esto es implementado utilizando primitivas de comunicación de grupo proveídas por librerías de paso de mensajes [23], lo que facilita la comunicación entre los distintos procesos utilizados.

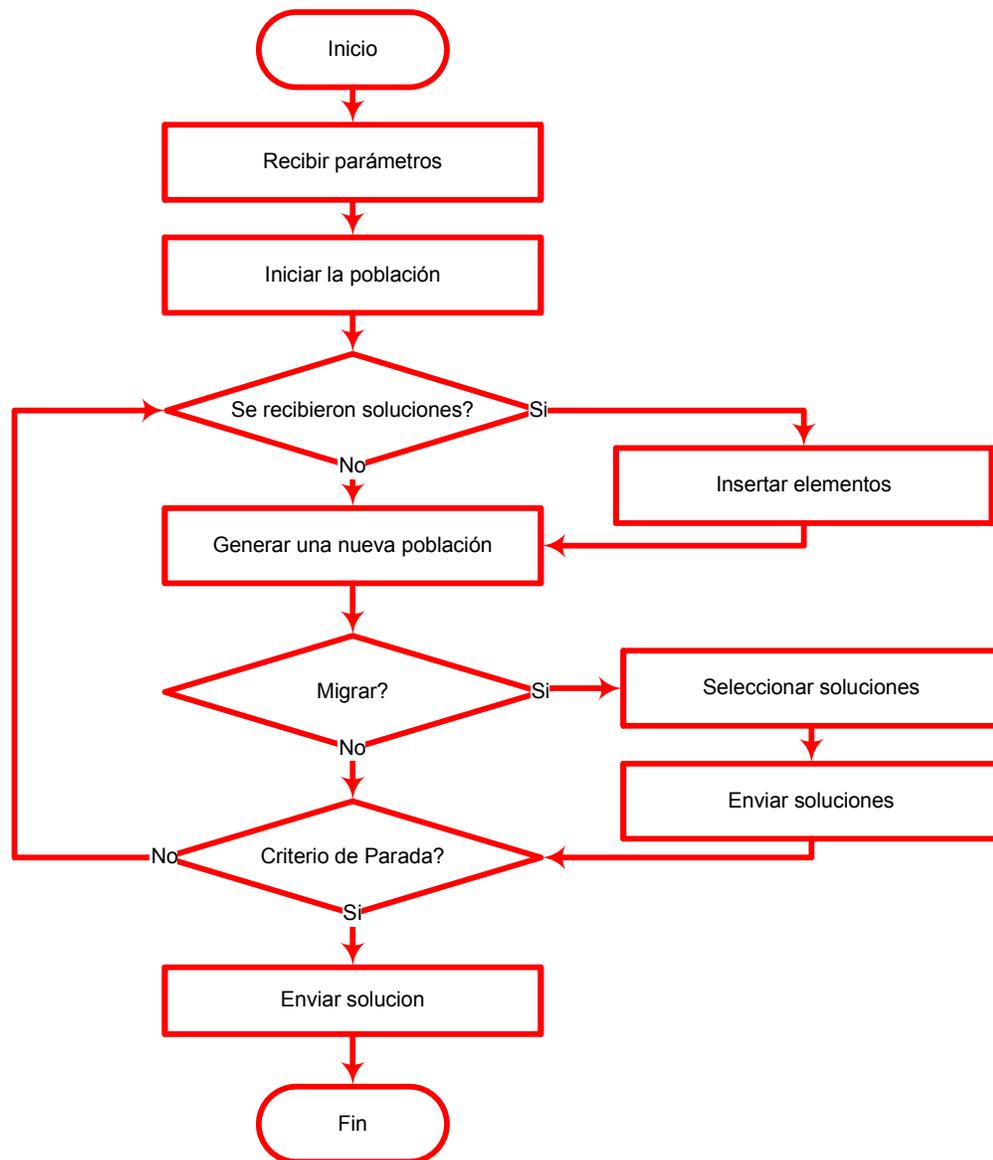


**Figura 2.** Diagrama de flujo del Coordinador

Como se explica más adelante, durante la evolución, cada uno de los MOEAs que interviene en la búsqueda envía a todos los elementos que componen el equipo de trabajo un porcentaje de las mejores soluciones obtenidas. Cuando el Coordinador recibe estas soluciones las almacena en la población Coordinador. A fin de mantener sólo las mejores soluciones, se eliminan las soluciones cubiertas.

Si los resultados recibidos corresponden a los de la última generación de un proceso MOEA, se reduce la cuenta de MOEAs en ejecución. Cuando ésta cuenta es igual a cero, se procede a eliminar las soluciones cubiertas existentes en la población Coordinador y la escritura final de los resultados obtenidos.

El Algoritmo representado en la Figura 3 presenta el marco general propuesto para la implementación de los distintos pMOEAs. Al comienzo, se realizan algunas tareas propias de inicialización. Primeramente, se reciben desde el Coordinador los distintos parámetros del MOEA utilizado. Además de los parámetros usuales, probabilidad de cruzamiento, selección, mutación, radio de nicho, etc., también se reciben la probabilidad de migración ( $p_{mig}$ ) así como el número máximo de elementos no dominados a migrar ( $n_{mig}$ ). Tras la fase de recepción de los parámetros del algoritmo, cada pMOEA se agrega a su equipo de trabajo.



**Figura 3.** Diagrama de flujo del pMOEA

Luego de la inicialización, los pMOEAs realizan el proceso evolutivo. En cada generación, se determina si se han recibido elementos provenientes de otras subpoblaciones. Si este es el caso, se realiza la recepción de los mismos. Luego de la recepción de los elementos se procede al reemplazo de los elementos dominados por los recibidos. En el peor caso, ninguna solución es dominada por alguna solución recibida. Cuando esto ocurre, el procedimiento de reemplazo no tiene ningún efecto sobre la estructura de la población genética, aunque sí un efecto negativo sobre la velocidad del algoritmo. Posteriormente, se realizan los procedimientos usuales de evolución para generar una nueva población. Luego, se determina si corresponde la migración de elementos en esa generación  $t$ . Si corresponde la migración, se obtienen los elementos no dominados existentes en  $P(t)$  para el caso de los algoritmos sin población externa y luego se selecciona de entre ellos, aleatoriamente, como máximo  $n_{\text{mig}}$  individuos, los cuales son enviados a todos los procesos que componen el equipo de trabajo. Transcurrido un cierto número de generaciones o alguna otra condición, se envían todos los elementos de  $Y_{\text{known}}(t)$  al proceso Coordinador. Al alcanzar un número máximo de generaciones, el pMOEA envía todas sus soluciones al Coordinador y finaliza.

## 5. Resultados Experimentales

En la presente sección se presentan los experimentos realizados y las métricas utilizadas con el objeto de evaluar el TA-MOEA propuestos.

### 5.1. Métricas Utilizadas

#### 5.1.1. Razón de Error ( $E$ )

Esta razón reporta la proporción de vectores objetivo en  $Y_{known}$  que no son miembros de  $Y_{true}$ . Por ello una razón cercana a 1 indica una baja correspondencia entre el frente obtenido y el real; i.e.  $E = 0$  es deseable. La definición matemática es:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{|Y_{known}|_c} \quad (5.1)$$

$$e_i = \begin{cases} 0 & \text{si un vector en } Y_{known} \text{ esta también en } Y_{true} \\ 1 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

#### 5.1.2. Distancia generacional ( $G$ )

Presentada primeramente en [26]; esta métrica es un valor que representa que tan lejos está  $Y_{known}$  de  $Y_{true}$ . Se define como:

$$G = \frac{\left(\sum_{i=1}^N d_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|Y_{known}|_c} \quad (5.2)$$

donde  $d_i$  es la distancia euclidiana (en el espacio objetivo) entre cada vector objetivo  $y \in Y_{known}$  y su miembro correspondiente más cercano en el frente Pareto óptimo real  $Y_{true}$ . Un valor grande de  $G$  indica que  $Y_{known}$  está alejado de  $Y_{true}$ ;  $G = 0$  es la situación ideal.

### 5.2. Descripción de los experimentos

Los siete algoritmos elegidos para este trabajo fueron implementados, para la resolución de los seis problemas de prueba presentadas en la Definición 3.1. Los algoritmos seleccionados se implementaron de acuerdo a la literatura original de referencia. Así se tienen 8 conjuntos, 7 de ellos conformados por pMOEAs y 1 por TA-MOEA.

Para el cálculo de las métricas que requieren el conocimiento del frente Pareto óptimo real, se utilizó como aproximación el conjunto de soluciones no dominadas con respecto al conjunto unión de los resultados obtenidos considerando todas las ejecuciones realizadas.

### 5.3. Resultados de los experimentos sobre los problemas ZDT

Basados en los valores óptimos de las métricas utilizadas se procede a clasificar los 8 conjuntos de algoritmos.

En la Figura 4 se observa las posiciones en los problemas ZDT1, ZDT2 y ZDT3 utilizando la métrica E, como vemos para el problema ZDT1 el mejor fue el CNSGA2 quedando en tercer lugar el TA-MOEA, en el problema ZDT2 quedo primero el SPEA mientras el TA-MOEA de nuevo obtiene el tercer lugar, en el problema ZDT3 el SPEA2 obtuvo el primer lugar y el TA-MOEA quedo segundo.

|   | Conjunto | ZDT1       |   | Conjunto | ZDT2       |   | Conjunto | ZDT3       |
|---|----------|------------|---|----------|------------|---|----------|------------|
| 1 | CNSGA2   | 0,0185418  | 1 | SPEA     | 0,06277056 | 1 | SPEA2    | 0,02111801 |
| 2 | SPEA2    | 0,06945917 | 2 | NSGA2    | 0,09090909 | 2 | TAMOEA   | 0,17924528 |
| 3 | TAMOEA   | 0,15082482 | 3 | TAMOEA   | 0,14628297 | 3 | SPEA     | 0,19920319 |
| 4 | SPEA     | 0,18105209 | 4 | SPEA2    | 0,20116279 | 4 | NSGA2    | 0,20762155 |
| 5 | NSGA2    | 0,1823913  | 5 | CNSGA2   | 0,20697954 | 5 | CNSGA2   | 0,21927791 |
| 6 | NSGA     | 0,99333333 | 6 | NSGA     | 0,98818898 | 6 | NSGA     | 0,89332728 |
| 7 | NPGA     | 0,997669   | 7 | NPGA     | 0,99647266 | 7 | NPGA     | 0,95016611 |
| 8 | MOGA     | 1          | 8 | MOGA     | 0,99799197 | 8 | MOGA     | 0,98551449 |

Figura 4. Resultados de la métrica E sobre los problemas ZDT1, ZDT2 y ZDT3

En la Figura 5 se observa las posiciones en los problemas ZDT4, ZDT5 y ZDT6 utilizando la métrica E, como vemos para el problema ZDT4 el mejor fue el TA-MOEA, en el problema ZDT5 quedo primero el SPEA2 mientras el TA-MOEA obtiene el tercer lugar, en el problema ZDT6 el TA-MOEA vuelve a quedar primero.

|   | Conjunto | ZDT4       |   | Conjunto | ZDT5       |   | Conjunto | ZDT6       |
|---|----------|------------|---|----------|------------|---|----------|------------|
| 1 | TAMOEAE  | 0,1062417  | 1 | SPEA2    | 0,25995316 | 1 | TAMOEAE  | 0,10097267 |
| 2 | CNSGA2   | 0,11342812 | 2 | CNSGA2   | 0,27649208 | 2 | SPEA     | 0,12797075 |
| 3 | SPEA     | 0,1618705  | 3 | TAMOEAE  | 0,28883495 | 3 | NSGA2    | 0,19253731 |
| 4 | NSGA2    | 0,23017903 | 4 | SPEA     | 0,31393298 | 4 | SPEA2    | 0,33478261 |
| 5 | SPEA2    | 0,24914286 | 5 | NSGA2    | 0,31652989 | 5 | CNSGA2   | 0,35118823 |
| 6 | NSGA     | 0,96350365 | 6 | NSGA     | 0,96020761 | 6 | MOGA     | 0,94278607 |
| 7 | NPGA     | 0,97968684 | 7 | NPGA     | 0,97586207 | 7 | NPGA     | 0,95189003 |
| 8 | MOGA     | 0,99001664 | 8 | MOGA     | 0,98684829 | 8 | NSGA     | 0,96020761 |

**Figura 5.** Resultados de la métrica E sobre los problemas ZDT4, ZDT5 y ZDT6

En la Figura 6 se observa las posiciones en los problemas ZDT1, ZDT2 y ZDT3 utilizando la métrica G, como vemos para el problema ZDT1 el mejor fue el TA-MOEA, en el problema ZDT2 quedo primero el CNSGA2 mientras el TA-MOEA obtiene el segundo lugar, en el problema ZDT3 el mejor fue el SPEA2 mientras el TA-MOEA vuelve a quedar segundo.

|   | Conjunto | ZDT1       |   | Conjunto | ZDT2       |   | Conjunto | ZDT3       |
|---|----------|------------|---|----------|------------|---|----------|------------|
| 1 | TAMOEAE  | 0,00012737 | 1 | CNSGA2   | 0,00023762 | 1 | SPEA2    | 0,00147351 |
| 2 | NSGA2    | 0,00014576 | 2 | TAMOEAE  | 0,00026035 | 2 | TAMOEAE  | 0,00154503 |
| 3 | SPEA2    | 0,00024714 | 3 | NSGA2    | 0,00026633 | 3 | NSGA2    | 0,00164381 |
| 4 | SPEA     | 0,00025936 | 4 | SPEA     | 0,00027105 | 4 | SPEA     | 0,00797476 |
| 5 | CNSGA2   | 0,00034837 | 5 | SPEA2    | 0,00036343 | 5 | NSGA     | 0,01033311 |
| 6 | NSGA     | 0,05687313 | 6 | NSGA     | 0,02506101 | 6 | CNSGA2   | 0,01544077 |
| 7 | NPGA     | 0,28573518 | 7 | NPGA     | 0,03055195 | 7 | NPGA     | 0,13675506 |
| 8 | MOGA     | 0,39595684 | 8 | MOGA     | 0,05624174 | 8 | MOGA     | 0,14065879 |

**Figura 6.** Resultados de la métrica G sobre los problemas ZDT1, ZDT2 y ZDT3

En la Figura 7 se observa las posiciones en los problemas ZDT4, ZDT5 y ZDT6 utilizando la métrica G, como vemos para el problema ZDT4 el mejor fue el TA-MOEA, en el problema ZDT5 quedo primero el NSGA2 mientras el TA-MOEA obtiene el cuarto lugar, en el problema ZDT6 el primer lugar lo ocupa el SPEA, quedando el TA-MOEA en tercera posición.

|   | Conjunto | ZDT4       |   | Conjunto | ZDT5       |   | Conjunto | ZDT6       |
|---|----------|------------|---|----------|------------|---|----------|------------|
| 1 | TAMOEAE  | 0,01883459 | 1 | NSGA2    | 0,00185052 | 1 | SPEA     | 0,00215552 |
| 2 | CNSGA2   | 0,02096637 | 2 | CNSGA2   | 0,00325496 | 2 | SPEA2    | 0,0043351  |
| 3 | NSGA2    | 0,34635745 | 3 | NSGA     | 0,00904485 | 3 | TAMOEAE  | 0,03487178 |
| 4 | SPEA     | 0,69991634 | 4 | TAMOEAE  | 0,018846   | 4 | CNSGA2   | 0,06705503 |
| 5 | SPEA2    | 0,72846653 | 5 | SPEA2    | 0,03014446 | 5 | NSGA2    | 0,08066857 |
| 6 | NSGA     | 0,8657436  | 6 | SPEA     | 0,03455024 | 6 | NSGA     | 0,09106741 |
| 7 | NPGA     | 0,86594995 | 7 | MOGA     | 0,09824596 | 7 | NPGA     | 0,10205026 |
| 8 | MOGA     | 0,89584308 | 8 | NPGA     | 0,10006193 | 8 | MOGA     | 0,20012904 |

**Figura 7.** Resultados de la métrica G sobre los problemas ZDT4, ZDT5 y ZDT6

Haciendo un promedio del conjunto global de problemas tratados, el TA-MOEA en la métrica E obtuvo el primer lugar, seguido del SPEA y el SPEA2, esto se aprecia en la Figura 8 a la izquierda, a la derecha se observa que el primer lugar de nuevo es ocupado por el TA-MOEA, esta vez utilizando la métrica G, seguido del CNSGA2 y el NSGA2.

| Razón de Error ( <i>E</i> ) |          |            | Distancia generacional ( <i>G</i> ) |          |            |
|-----------------------------|----------|------------|-------------------------------------|----------|------------|
|                             | Conjunto | PROMEDIO   |                                     | Conjunto | PROMEDIO   |
| 1                           | TAMOEAE  | 0,16206707 | 1                                   | TAMOEAE  | 0,01241419 |
| 2                           | SPEA     | 0,17446668 | 2                                   | CNSGA2   | 0,01788385 |
| 3                           | SPEA2    | 0,18926977 | 3                                   | NSGA2    | 0,07182207 |
| 4                           | CNSGA2   | 0,19765128 | 4                                   | SPEA     | 0,12418788 |
| 5                           | NSGA2    | 0,20336136 | 5                                   | SPEA2    | 0,12750503 |
| 6                           | NSGA     | 0,95979474 | 6                                   | NSGA     | 0,17635385 |
| 7                           | NPGA     | 0,97529112 | 7                                   | NPGA     | 0,25351739 |
| 8                           | MOGA     | 0,98385957 | 8                                   | MOGA     | 0,29784591 |

Figura 8. Posiciones según la métrica E y la métrica G

Concluyendo se puede afirmar que el TA-MOEA presenta soluciones más robustas ante un conjunto de problemas con características y dificultades diferentes, convirtiéndose en una opción válida para la resolución de problemas de optimización multiobjetivo.

## 6. Conclusiones y Trabajos Futuros

A partir de los distintos resultados experimentales obtenidos, se han propuesto conclusiones parciales sobre la implementación del TA-MOEA en la resolución de cada uno de los problemas considerados. Con estos, es posible arribar a las siguientes conclusiones finales de este trabajo:

- El diseño e implementación de un equipo de algoritmos evolutivos multiobjetivo paralelos es un problema complejo. Existen varias decisiones que tomar. El rango de éstas va desde el tipo de plataforma paralela en que se realizará la implementación, hasta la determinación de diversos parámetros.
- Se hace necesario un mayor estudio sobre las diferentes alternativas de combinación de los algoritmos existentes y la determinación de parámetros adecuados de migración.
- Teniendo en cuenta las métricas utilizadas para medir la calidad del conjunto aproximación, se puede establecer que los TA-MOEA han sido los que lograron, en general, un mejor desempeño. Esta diferencia se extiende en toda la gama de problemas resueltos en este trabajo.
- Si bien los pMOEAs de primera generación obtienen pocas o ninguna solución, el tiempo de ejecución de los mismos es muy inferior pues están liberados de la utilización de mecanismos para la preservación de soluciones. Estos podrían ser utilizados en forma adecuada como métodos de evolución secundaria utilizando procesos pMOEAs distintos. Así, los procesos pMOEAs de segunda generación se podrían encargar de proveer soluciones no dominadas a procesos pMOEAs de primera generación, con la esperanza que estos evolucionen hacia nuevas regiones del espacio de búsqueda encontrando soluciones no dominadas distintas. Este también es un mecanismo válido para promover la formación de diversidad lateral y preservación de información genética.
- Al utilizar TA-MOEA, se extiende el espacio de búsqueda. La recepción de elementos provenientes de distintos algoritmos introduce información genética en forma aleatoria que es útil para la obtención de mejores soluciones. Es necesario determinar la mejor manera de incorporar esta información en los diferentes procesos paralelos esclavos.

En resumen a partir de los distintos resultados presentados queda claro que la utilización del TA-MOEA es adecuada para la búsqueda de soluciones en espacios de búsqueda complejos y de alta dimensionalidad.

De forma a continuar con el trabajo iniciado, los siguientes tópicos son propuestos como trabajos futuros:

- modelado matemático de los algoritmos propuestos, de manera a hallar la complejidad de los mismos;
- implementación de TA-MOEA que incorporen criterios de selección más refinados y dinámicos.
- realizar un estudio en mayor profundidad de las distintas métricas y como se correlacionan.
- estudio e implementación de nuevos problemas de ingeniería que sirvan de base comparativa y experimental para el TA-MOEA.

- comparar el desempeño del TA-MOEA variando distintos parámetros, como ser las probabilidades de migración y número de soluciones migrantes.

## Referencias

- [1] T. Bäck, D. B. Fogel, y Z. Michalewicz, editors. *Handbook of Evolutionary Computation*. Institute of Physics Publishing and Oxford University Press, 1997.
- [2] B. Barán, J. Vallejos, R. Ramos, y U. Fernández. Multi-objective reactive power compensation. En *2001 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*, volume 1, págs. 97–101. IEEE, 2001.
- [3] B. Barán, E. Kaszkurewicz y D. M. Falcão. Team Algorithms in Distributed Load Flow Computations. *IEEE Proceeding on Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 142, No. 6, pg. 583-588, noviembre 1995. Londres - Gran Bretaña.
- [4] B. Barán, N. Cáceres y E. Chaparro. Reducción del Tiempo de Búsqueda utilizando una Combinación de Algoritmos Genéticos y Métodos Numéricos. *XV International Conference of the Chilean Computer Science Society*. Arica - Chile, 1995.
- [5] B. Barán, E. Kaszkurewicz y A. Bhaya. Parallel Asynchronous Team Algorithms: Convergence and Performance Analysis. *IEEE Transactions on Parallel & Distributed Systems*, Vol. 7, No. 7, pg. 677-688, julio 1996. Estados Unidos.
- [6] B. Barán, E. Chaparro y N. Cáceres. A-Teams en la Optimización del Caudal Turbinado de una Represa Hidroeléctrica. *IBERAMIA-98*, Lisboa-Portugal. 1998
- [7] B. Barán. Parallel Asynchronous Team Algorithms: Convergence and Performance Analysis. *IEEE Transactions on Parallel & Distributed System*, 7(7):677-688, Julio 1999.
- [8] C. A. Coello Coello y G. Toscano Pulido. A Micro-Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. En E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello, y D. Corne, editors, *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, págs. 126–140. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [9] C. A. Coello Coello y C. E. Mariano Romero. Evolutionary Algorithms and Multiple Objective Optimization. En M. Ehrgott y X. Gandibleux, editors, *Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*, págs. 277–331. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.
- [10] C. A. Coello Coello. An Updated Survey of GA-Based Multiobjective Optimization Techniques. Technical Report Lania-RD-98-08, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada (LANIA), Xalapa, Veracruz, México, December 1998.
- [11] C. A. Coello Coello. Constraint handling through a multiobjective optimization technique. En A. S. Wu, editor, *Proceedings of the 1999 Genetic and Evolutionary Computation Conference. Workshop Program*, págs. 117–118, Orlando, Florida, Julio 1999.
- [12] J. Crichigno y B. Barán, “Multiobjective Multicast Routing Algorithm”. *IEEE ICT’2004*, Ceará, Brasil, 2004.
- [13] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab, y T. Meyarivan. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II. KanGAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2000.
- [14] K. Deb y T. Goel. Controlled Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithms for Better Convergence. En E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello, y D. Corne, editors, *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, págs. 67–81. Springer- Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [15] K. Deb. Multi-Objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems, Technical Report CI-49/98, Dortmund: Department of Computer Science/LS11, University of Dortmund, Germany, 1998.
- [16] K. Deb. Evolutionary algorithms for multi-criterion optimization in engineering design. En K. Miettinen, M. M. Mäkelä, P. Neittaanmäki, y J. Periaux, editors, *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, págs. 135–161, Chichester, UK, 1999. JohnWiley & Sons, Ltd.
- [17] N. M. Duarte, A. E. Ruano, C. M. Fonseca, y P. J. Fleming. Accelerating Multi-Objective Control System Design Using a Neuro-Genetic Approach. En *2000 Congress on Evolutionary Computation*, volume 1, págs. 392–397, Piscataway, New Jersey, Julio 2000. IEEE Service Center.
- [18] S. Duarte y B. Barán. Multiobjective Network Design Optimisation Using Parallel Evolutionary Algorithms. En *XXVII Conferencia Latinoamericana de Informática CLEI-2001*, Mérida, Venezuela, 2001.
- [19] C. M. Fonseca y P. J. Fleming. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. En S. Forrest, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, págs. 416–423, San Mateo, California, 1993. University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kauffman Publishers.
- [20] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison- Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1989.
- [21] J. Horn y N. Nafpliotis. Multiobjective Optimization using the Niche Pareto Genetic Algorithm. Technical Report IlliGAL Report 93005, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, USA, 1993.

- [22] K. Miettien. Some methods for nonlinear multi-objective optimization. En E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello, y D. Corne, editors, First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science No. 1993, 2001.
- [23] A. G. et al. PVM:Parallel Virtual machine - A user's guide and Tutorial for Networked parallel Computing. M.I.T. press, Cambridge, MA, 1994.
- [24] N. Srinivas y K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. Technical report, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 1993.
- [25] D. A. van Veldhuizen, J. B. Zydallis, y G. B. Lamont. Issues in Parallelizing Multiobjective Evolutionary Algorithms for Real World Applications. En Proceedings of the 17th ACM Symposium on Applied Computing, págs. 595–602, Madrid, Spain, 2002. ACM Press.
- [26] D. A. van Veldhuizen. Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses, and New Innovations. PhD thesis, Department of Electrical and Computer Engineering. Graduate School of Engineering. Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, Ohio, Mayo 1999.
- [27] E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello, y D. Cornde, editors. Proceedings of the First International conference on EMOO, 2001, Berlin, Germany, Marzo 2001. Springer-Verlag.
- [28] E. Zitzler, M. Laumanns, y L. Thiele. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm, in K. Giannakoglou, D. Tsahalis, J. Periaux, P. Papailou and T. Fogarty (eds.) EUROGEN 2001, Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, pp. 95--100, Athens, Greece, 2002.
- [29] E. Zitzler y L. Thiele. An Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization: The Strength Pareto Approach. Technical Report 43, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, Mayo 1998.
- [30] E. Zitzler, K. Deb, y L. Thiele. Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms on Test Functions of Different Difficulty. En A. S. Wu, editor, Proceedings of the 1999 Genetic and Evolutionary Computation Conference. Workshop Program, págs. 121–122, Orlando, Florida, Julio 1999.